Les machines à construire

Des modèles d'interaction pour apprendre une méthode constructive de dénombrement

Madame Françoise LE CALVEZ,
Madame Marie URTASUN
Jeune Équipe Informatique et Communication
UFR de Mathématiques et Informatique
Université René Descartes
45 rue des Saints Pères
F-75270 Paris Cedex 06

Madame Hélène GIROIRE,
Monsieur Gérard TISSEAU
LAFORIA UA 1095
Université Pierre et Marie Curie
Boîte 169, Tour 46-0 2° étage
4 Place Jussieu
F-75252 Paris Cedex 05

email : giroire@laforia.ibp.fr
téléphone : 01 44 27 70 05
fax : 01 44 27 70 00

Monsieur Jacques DUMA
Lycée technique Jacquard
2 rue Bouret
75019 Paris

RÉSUMÉ : La résolution de problèmes de dénombrement présente des difficultés dues à la nécessité de modéliser les situations étudiées. A partir de la modélisation d'une situation, la méthode constructive de résolution consiste à énoncer un algorithme d'énumération des éléments de l'ensemble à dénombrer et à raisonner sur cet algorithme sans l'exécuter. Dans le cadre du projet COMBIEN?, nous avons mis en œuvre cette méthode dans un système capable de résoudre des problèmes et d'évaluer des solutions. Pour l'enseigner, nous proposons une progression pédagogique dont la première phase est l'utilisation de "machines à construire des objets" permettant aux élèves de se forger des représentations adaptées et de se familiariser avec l'application de la méthode à différentes classes de problèmes.

1. Introduction

Le projet Combien? a pour but la réalisation d'un EIAO dans le domaine des dénombrements. Le système en cours de réalisation doit permettre à un élève d'une classe de terminale scientifique de se familiariser avec certains types de représentation et d'utiliser une méthode particulière de résolution que nous appelons "constructive".

Dans cet article, nous commençons par rappeler les particularités des problèmes de dénombrement puis nous décrivons la méthode constructive et les représentations associées. Ensuite, nous indiquons comment un système peut appliquer cette méthode pour résoudre des exercices et analyser la validité d'une proposition de solution. Nous avons réalisé un tel système, mais il n'est pas directement destiné aux élèves.

Pour enseigner la méthode, il est nécessaire de recourir à une transposition didactique. Dans ce but, nous avons commencé la réalisation d'interfaces fondées sur la métaphore de *machines à construire des objets* offrant aux élèves une première approche de la méthode constructive. Nous en décrivons des exemples et montrons comment l'utilisation de ces machines peut s'insérer dans une progression pédagogique.

2. Les problèmes de dénombrement

Voici un exemple de la façon dont un problème de dénombrement est couramment posé et résolu en classe de terminale scientifique :

> — Combien y a-t-il de mots de 5 lettres contenant un a ?
> — J'ai 5 possibilités pour le a et quand j'ai choisi le a je peux mettre n'importe quelle lettre différente du a sur les positions restantes. J'ai donc $5 \infty 25^4$ solutions.

Cette façon de s'exprimer n'est pas très précise et ne constitue pas vraiment une démonstration du résultat, même si celui-ci est juste. Qu'est-ce qu'un "mot" ? A quoi correspond "5 possibilités pour le a" ? Que veut dire "j'ai choisi le a", et que sont les "positions restantes" ? Qu'est-ce qui prouve que les opérations effectuées donnent la réponse à la question ?

Une façon de préciser tout cela est d'adopter une représentation mathématique. L'utilisation de l'expression "position d'une lettre dans un mot" en suggère une : un mot peut être vu comme un ensemble de couples (numéro de place, lettre). Ainsi la représentation du mot "tarot" est {(1,t), (3,r), (5,t), (2,a), (4,o)}. Un tel ensemble est en fait une application de l'ensemble des places dans l'ensemble des lettres et le problème précédent peut alors être modélisé comme :

> Soient deux ensembles : l'alphabet A et l'ensemble P = {1, 2, 3, 4, 5}. Combien y a-t-il d'applications de P dans A telles que la lettre a apparaisse une fois et une seule comme deuxième composante dans l'ensemble des couples formés ?

L'expression "combien y a-t-il de …" peut se traduire par "quel est le cardinal de l'ensemble des …", ce qui met ainsi en évidence un concept fondamental en dénombrement : *l'ensemble à dénombrer*, qui est défini comme l'ensemble des éléments d'un *univers* U (ici l'ensemble des applications de P dans A) vérifiant certaines contraintes. Résoudre un problème de dénombrement revient donc toujours à calculer le cardinal de l'ensemble à dénombrer, ensemble que nous appellerons Ed.

3. Une méthode constructive

Il est possible de calculer le cardinal de l'ensemble Ed sans énumérer ses éléments, mais simplement en raisonnant sur la façon dont on pourrait les énumérer. En effet, la liste des éléments n'est que le résultat de l'exécution d'un algorithme d'énumération et une méthode efficace de dénombrement consiste à expliciter cet algorithme et à l'analyser pour prévoir combien d'éléments il va engendrer, sans qu'il soit nécessaire de l'exécuter. C'est ce que nous appelons une méthode constructive sans exécution, dont nous avons formalisé une version dans [TIS 96]. C'est la démarche que nous voudrions voir suivre par l'élève et que nous avons utilisée dans notre résolveur. Elle est d'ailleurs fréquemment utilisée par les élèves et dans les manuels, mais de manière informelle et implicite, ce qui crée des difficultés (voir [ANT 88]). Les comportements des élèves ont été étudiés dans différents travaux de didactique ([GRE 81],.[FIS 88], [BAT 95]).

La méthode a l'avantage de permettre l'élaboration d'une démonstration rigoureuse des solutions, mais elle exige une modélisation préalable de l'énoncé et utilise des concepts mathématiques encore peu familiers des élèves du niveau considéré.

3.1. Qu'est-ce qu'une construction ?

Précisons ce que nous entendons par "algorithme d'énumération". Un tel algorithme doit être suffisamment simple pour qu'un élève puisse en élaborer un lui-même et puisse l'analyser pour aboutir à un dénombrement. Pour cela, nous avons écarté les langages qui conduiraient à l'utilisation de boucles ou de récursivité, notions qui devraient faire l'objet d'un enseignement préalable.

Définition des ensembles de départ
1- Soit P l'ensemble des 5 places
2- Soit A l'alphabet

Prise en compte de la contrainte : Position du a dans le mot (M)
3- Soit Aa la partie de A contenant seulement la lettre a : {a}
4- Choisir une place dans P : Pa est l'ensemble contenant cette place.
5- Construire l'unique application Ma de Pa dans Aa : Ma est l'ensemble formé par le couple (place,a)

Construction du complémentaire de Ma dans M : les autres lettres
6- Soient CPa-P, le complémentaire de Pa dans P et CAa-A le complémentaire de Aa dans A.
7- Construire une application de CPa-P dans CAa-A, notée CMa-M. C'est un ensemble de couples (place autre que la place du a, lettre autre que a).

Construction du mot
8- En faisant la réunion de CMa-M et Ma on obtient M, un élément de l'ensemble à dénombrer.

Figure 1 : *exemple de construction*

Les algorithmes de base que nous considérons, appelés *constructions*, sont des séquences d'instructions dont chacune a pour effet de définir un objet. Certaines de ces instructions peuvent être non-déterministes, ce qui permet d'introduire l'équivalent des boucles ou de la récursivité sous une forme simple.

La figure1 présente un exemple de construction pour le problème des mots de cinq lettres qui contiennent exactement un a.

Le résultat final de l'exécution de cette construction est un élément de l'ensemble à dénombrer Ed, obtenu aléatoirement en raison des deux instructions non déterministes (numéros 4 et 7). Interprété de cette façon, ce n'est pas un algorithme d'énumération, mais seulement un algorithme de construction d'un élément. De ce fait, il est assez facile à comprendre et à concevoir. Toutefois, il peut aussi être vu comme un algorithme d'énumération : si on l'exécute en explorant systématiquement toutes les réponses possibles aux instructions non déterministes, on engendre une liste de tous les éléments de l'ensemble Ed. C'est une forme d'utilisation de la logique comme langage de programmation [KOW 74]. Nous l'exploitons ici à un niveau méta [PIT 90] : nous ne cherchons pas à faire exécuter l'algorithme, mais nous le considérons comme objet d'étude.

3.2. Raisonner sur une construction

Nous pouvons maintenant raisonner sur cette construction pour calculer le nombre d'éléments de Ed qui peuvent être construits ainsi. Dans cet exemple les étapes 1, 2, 3, 5, 6, 8 sont déterministes. Les nombres de façons différentes d'exécuter les étapes 4 et 7 sont respectivement de 5 et 25^4. Le cardinal cherché est le produit du nombre de possibilités à chaque étape, soit $5\infty 25^4$. Un tel calcul est valide chaque fois que la construction est *injective* c'est-à-dire qu'il n'est pas possible qu'un même élément soit construit de plusieurs façons différentes.

Pour résoudre les problèmes de dénombrement étudiés, il faut introduire des opérations permettant de combiner plusieurs constructions : disjonction de deux constructions, complémentaire d'une construction par rapport à une autre, quotient d'une construction par une relation d'équivalence. On appellera "plan" une construction ou une combinaison de constructions. La formation des plans est soumise à certaines règles et si elles sont respectées on dira que le plan est bien formé.

3.3. Comment trouver une construction

Il ne semble pas que l'on puisse engendrer une solution constructive injective à l'aide d'un algorithme général applicable à tout énoncé. En tout cas, les solutions d'exercices données dans les livres ne donnent aucune indication sur cette étape et fournissent directement une solution constructive sans dire comment elle a été obtenue, ni pourquoi elle est valide. Nous présentons ici deux méthodes permettant d'engendrer une définition constructive.

Méthode heuristique

Cette méthode est analogue à la méthode usuelle utilisée pour les constructions géométriques : raisonner sur la figure supposée construite pour en extraire les propriétés nécessaires, utiliser ces propriétés comme base de construction, puis montrer que ces propriétés sont suffisantes.

Dans l'exemple : un mot de 5 lettres contenant exactement un a, les éléments intéressants sont d'une part la place du a et d'autre part les places restantes et les autres lettres. C'est ce que nous avons utilisé pour écrire la solution constructive de la figure 1. On y retrouve les ensembles Pa, Aa (Place du a et a) et CPa-P, CAa (places restantes et les autres lettres) ainsi que les applications Ma et CMa-M qui permettent de former les couples (Places, Lettres). Le mot cherché est donné par la réunion de Ma et CMa-M.

Deux difficultés principales se présentent dans cette démarche : d'abord identifier les propriétés et les éléments intéressants sans se laisser submerger par l'explosion combinatoire des possibilités et ensuite engendrer une construction à partir des éléments identifiés. On peut utiliser pour cela des heuristiques comme : si la configuration est une liste qui possède exactement n occurrences d'une valeur v, alors introduire comme objet intéressant l'ensemble des positions où figure v.

Méthode utilisant une classification

L'observation de certains experts montre qu'ils connaissent des classes de problèmes classiques et qu'ils savent leur associer des schémas valides de définitions constructives et injectives. Ils procèdent en déterminant la classe du problème par l'analyse de son énoncé, puis instancient le schéma associé pour engendrer la définition constructive équivalente. L'intérêt de cette méthode est qu'elle garantit la validité des solutions lorsqu'elle est applicable.

Nous avons élaboré une classification des problèmes de dénombrement, moins générale que celle de [DUB 84], mais qui prend en compte plus de contraintes. l'exemple ci-dessus fait partie de la classe “répartition-liste-sans-remise” et l'instanciation du schéma associé conduit à une solution constructive analogue à celle de la section 3.1.

4. *Un système utilisant la méthode constructive*

Notre objectif est de faire utiliser la méthode constructive par les élèves pour résoudre les problèmes de dénombrement par l’intermédiaire d’un système d’EIAO. Nous avons posé différentes exigences concernant ce système. Il doit d’abord être capable non seulement de proposer à l’élève des problèmes mémorisés dans une base mais aussi d’en recevoir de nouveaux, saisis par l’élève. Il doit ensuite être lui-même capable de résoudre ces problèmes par la méthode constructive et d'expliciter sa solution. Enfin, il doit être capable de recevoir une proposition de solution constructive pour déterminer sa validité.

Nous avons mis au point un système d'IA comprenant actuellement un résolveur de problèmes, un évaluateur de solutions constructives et des interfaces. Nous décrivons ce système dans le rapport interne [TIS 97]. Nous n’en donnons ici qu’un aperçu, car c’est un prototype qui n’est pas destiné à être utilisé directement par un élève : ses interfaces et son langage sont encore trop techniques pour cela. Mais il est destiné à servir de noyau au système d'EIAO que nous réalisons.

Notre système permet la saisie d'un nouveau problème au moyen d'une interface qui oblige l'utilisateur à modéliser l'énoncé c'est à dire à définir les ensembles mis en jeu et à formuler la question en termes de contraintes. Par exemple la modélisation de “combien y a-t-il de mots de 5 lettres contenant deux a” est :

```
Soient
E1 intervalle de "a" à "z"          ; l'alphabet
E2 intervalle de 1 à 5              ; un ensemble de 5 places
E3 énumération ("a")                ; le singleton {a}
Dénombrer l'ensemble des listes
  formées avec E1
  de longueur 5
  avec 2 occurrences dans E3
```

Le problème est ensuite résolu en utilisant une classification des problèmes. Cette méthode de résolution a été mise en œuvre par N. Guin [GUI 95], sous forme d'un système d'IA : SYRCLAD. Elle a été appliquée avec succès à 60 exercices et permet de résoudre la majorité des exercices posés dans les classes de terminale scientifique. À partir de l'énoncé modélisé, le résolveur SYRCLAD détermine la classe du problème et lui associe un plan de résolution qui est soit une construction soit une combinaison de constructions.

Une autre interface permet de recevoir une solution proposée par l'utilisateur sous forme de plan et de vérifier que ce plan est bien formé. On peut par exemple saisir le plan suivant :

```
C3 complémentaire de E3 dans E1 ; les lettres différentes de a
E4 combinaison de 2 éléments de E2 ; choisir 2 places
E5 application de E4 dans E3    ; remplir les 2 places avec a
C4 complémentaire de E4 dans E2 ; les autres places
E6 application de C4 dans C3    ; compléter les autres places
E7 union E5 E6                  ; le mot résultat
```

Les E_i et les C_i sont des variables représentant des ensembles. Les ensembles E4, E5 et E6 sont définis de manière non-déterministe.

L'évaluateur de solutions recherche si la solution proposée est une instance d'une structure de plan correspondant à une classe de problèmes connue et compare cette classe à celle que le résolveur a déterminée. Si les deux sont identiques, alors la solution de l'utilisateur et celle du système peuvent être comparées et le système peut conclure quant à la validité de la solution proposée. C'est le cas dans l'exemple précédent, où la solution est valide.

Sinon diverses heuristiques permettent d'établir des éléments de diagnostic auxquels seront associées des indications facilitant la correction des erreurs, comme des contre-exemples. Avec le problème des mots de cinq lettres contenant deux A, on pourrait afficher les messages suivants : “Votre construction engendre plusieurs fois certains mots, par exemple le mot ABACD” ou “Votre construction n'engendre pas tous les mots demandés. Il manque par exemple le mot AABCD” ou encore “Votre construction engendre le mot AAABC, qui ne vérifie pas les contraintes car A figure 3 fois et non 2”.

L'utilisation de ce système suppose déjà une certaine familiarité avec les concepts mathématiques et avec la méthode constructive de dénombrement. Pour aider l'élève à acquérir préalablement cette familiarité, nous lui proposons de s'entraîner en utilisant des “machines à construire”, qui matérialisent certains schémas de constructions associés aux classes de problèmes courantes. Nous décrivons ces machines dans ce qui suit. Nous les avons conçues pour placer l'élève dans des situations d'interaction où il peut observer et manipuler les objets intervenant dans la méthode constructive. Le modèle conceptuel de cette méthode n'est pas présenté de manière théorique, mais sous une forme concrète (une machine), ce qui introduit plusieurs niveaux de modélisation (comme dans [BER 95]). Certaines modalités d'interaction contraignent l'élève à affronter les difficultés propres à la méthode, ce qui est courant en EIAO [DUB 95].

5. Les machines à construire

Ces “machines” se présentent à l'écran sous forme de fiches interactives, qui correspondent chacune à une classe de problèmes de dénombrement. Elles sont capables de construire certains objets mathématiques structurés : relations, applications, ensembles et listes. L'élève utilise ces machines pour produire un objet vérifiant des spécifications données, par exemple un mot de cinq lettres contenant exactement deux a.

Le contrôle de l'activité est partagé entre le système et l'élève. Le système détermine à chaque étape quelles possibilités d'action laisser à l'élève (quels boutons et menus sont activables), quelles informations afficher (état des variables, listes de choix). Pour cela, il tient à jour de manière interne des variables indiquant l'état d'avancement de la construction et vérifie la cohérence des actions et des choix de l'élève. Les activités conjointes du système et de l'élève concourent à exécuter un algorithme de construction, chaque machine étant associée à un certain algorithme qui est inscrit dans sa structure et son comportement.

Nous avons conçu une quinzaine de machines, dont nous allons présenter deux exemples existant à l'état de prototypes.

5.1. La machine “construction d'ensembles”

Les constructions qui entrent dans cette catégorie sont du type suivant : à partir d'éléments donnés au départ (par exemple les 32 cartes d'un jeu), construire un ensemble (une main de cartes) vérifiant certaines contraintes (la main contient 2 piques et 3 cœurs). Cela permet de résoudre par exemple les problèmes suivants : *combien y a-t-il de mains de 5 cartes contenant 2 piques et 3 cœurs* ou *combien y a-t-il de mains de 5 cartes contenant 3 as et 2 valets*. Le but de la machine est de forcer l'élève à expliciter les différents éléments du problème : ensembles, contraintes.

La figure 2 présente la machine “Construction d'ensembles”. L'aspect à l'écran n'est pas exactement celui de la figure (les interfaces sont en phase de mise au point et sont fréquemment modifiées sur des points de détail), mais celle-ci rend bien compte de la structure de la fiche. Sur le dessin, on a fait figurer, en plus de la fiche proprement dite, des bulles de commentaire correspondant à l'exemple représenté.

La fiche comporte deux zones : la zone *énoncé du problème* et la zone *construction*. Dans la zone *énoncé du problème* l'élève peut choisir un énoncé dans une liste prédéfinie (ici l'exercice exo1). La zone *construction* se décompose en une partie de choix des ensembles manipulés dite *paramétrage* et la partie tirage proprement dite *tirage*.

Dans la partie *paramétrage*, la fiche permet à l'élève de donner les premiers éléments de sa modélisation : ensemble des objets de départ (ici le jeu de cartes), taille de l'ensemble formé (5). Les titres de rubriques sont spécifiques de la fiche concernée, mais suggèrent les concepts généraux sous-jacents.

Dans la partie *tirage* l'élève agit pour construire un élément à l'aide de boutons-actions spécifiques (ici le bouton *tirer*) qui lancent l'exécution d'une étape de la construction. Celle-ci est visualisée en pas à pas, ce qui permet de matérialiser le déroulement de l'algorithme.

Ces différentes zones se retrouvent sur toutes les sortes de fiches sous une forme ou une autre.

L'état de la fiche représenté sur la figure correspond à l'instant où l'élève vient de faire tirer les deux cartes de pique, il va maintenant ajouter la contrainte couleur = coeur et appuyer sur le bouton *tirer*. Le résultat est visualisé à chaque étape dans la case *résultat*.

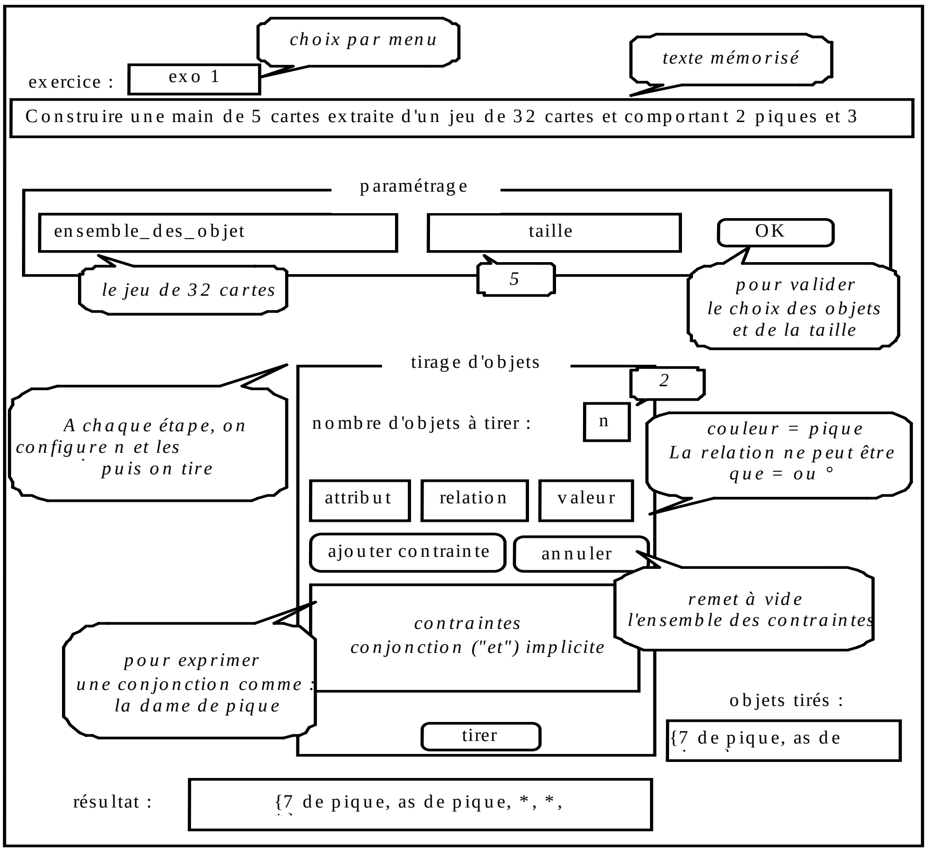

Figure 2 : *construction d'ensembles*

5.2. La machine "distribution d'objets à des personnes"

Cette machine permet de simuler la distribution d'objets à des personnes, par exemple attribuer une médaille d'or, une d'argent et une de bronze à trois des concurrents d'une compétition sportive. Plus généralement, on peut représenter des associations entre objets.

Pour décrire le résultat d'une distribution d'objets à des personnes, il est assez naturel de se placer du point de vue des personnes : la personne A a reçu les objets 2 et 3, la personne B n'a rien reçu, la personne C a reçu l'objet 1, etc. Or il est plus efficace, pour des problèmes de dénombrement, de se placer du point de vue des objets : l'objet 1 a été attribué à la personne C, l'objet 2 à la personne A, l'objet 3 à la personne A, etc. La correspondance des objets vers les personnes possède en effet une propriété mathématique intéressante : c'est une application (tout objet est attribué à une personne et une seule). La "machine à distribuer des objets" oblige l'élève à adopter ce point de vue s'il veut construire une distribution : elle présente les objets un par un et demande d'associer à chacun une personne.

Puisque le comportement est inscrit dans la structure même de la machine et ne peut être changé, l'élève n'a aucune possibilité de contourner la difficulté : il doit mettre en œuvre une procédure utilisant le nouveau point de vue. La réaction de contournement, naturelle face à une nouveauté dérangeante, est ainsi évitée et l'obstacle que représente le changement de point de vue est obligatoirement abordé.

Dans le cas où l’élève réussit à construire l’objet demandé, il peut constater de lui-même que le nouveau point de vue est opérationnel et le considérer dorénavant comme un outil potentiel. Avec cette démarche notre objectif est qu'il se fabrique un schéma mental associant une représentation de cette classe de problème et un algorithme de construction [JUL 95].

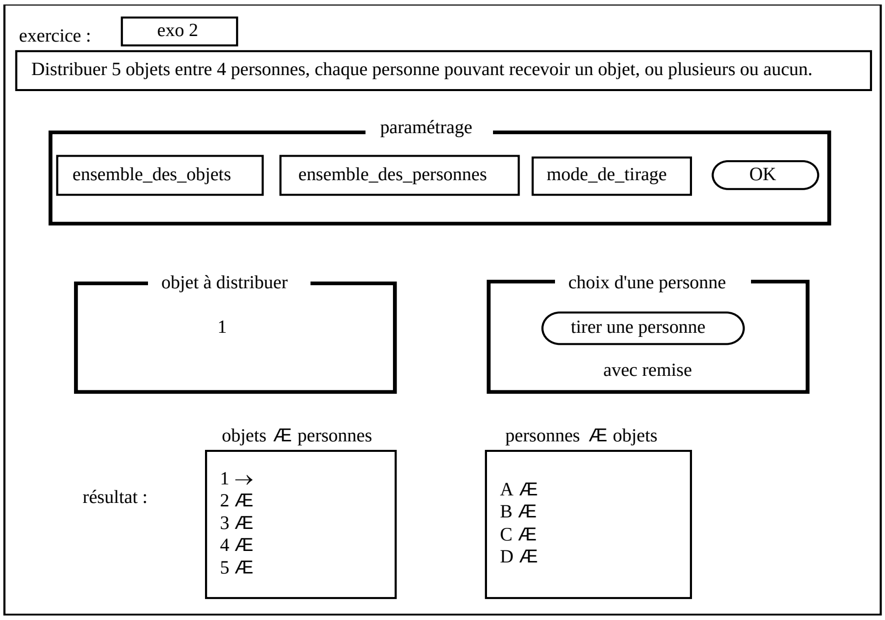

Figure 3 : *distribution d’objets à des personnes*

La figure 3 montre un exemple de fiche. La disposition des ensembles sur l’écran est conforme à la représentation visuelle habituelle des mathématiques. Pour représenter une application, l’ensemble de départ sera à gauche et l’ensemble d’arrivée à droite.

Pour permettre une comparaison nécessaire et montrer à l’élève que son ancien point de vue n’est pas purement et simplement nié, le résultat de la distribution est présenté de deux façons, du point de vue des objets et du point de vue des personnes, et cela à chaque étape de la construction. L’élève peut alors constater que la régularité de la répartition suivant les objets (un objet, une personne) s’oppose à l’irrégularité de la répartition suivant les personnes (une personne peut avoir un objet, ou plusieurs ou aucun).

Il peut également se rendre compte que la modification des conditions de la distribution ne bouleverse pas le principe de la méthode. En effet, on peut agir sur le paramètre “mode de distribution” pour autoriser ou interdire l’attribution de plusieurs objets à une même personne sans que cela change la structure ou le comportement de la machine : elle continue de passer en revue les objets et de demander une personne bénéficiaire pour chacun d’entre eux.

6. Une progression pédagogique

L’utilisation des machines est prévue pour s’insérer dans une progression pédagogique que nous exposons ici.

6.1. Construction d’une seule solution

Première phase : découverte et familiarisation

L’élève prend d’abord connaissance avec les machines une par une, dans un ordre approximativement croissant de complexité. Pour chaque machine, le système propose à l’élève des exercices qu’on peut résoudre avec la machine. Pour chaque exercice, le travail consiste à configurer correctement la machine puis à l’utiliser de manière à produire un objet répondant aux spécifications. Les objectifs didactiques de cette première phase sont les suivants : d’abord faire prendre conscience de la nécessité d’une analyse rigoureuse d’un énoncé (indispensable à la bonne configuration d’une machine), ensuite familiariser l’élève avec les différentes machines et enfin lui faire découvrir et utiliser des méthodes de représentation et de construction qu’il n’aurait peut-être pas spontanément adoptées.

Deuxième phase : reconnaissance et classification

Le système propose de nouveaux exercices sans indiquer quelle est la machine la mieux adaptée. La tâche de l'élève est de choisir une machine, puis de la configurer et enfin de l'utiliser. Il peut pour cela revoir les exercices qu'il a déjà résolus dans la première phase. L'objectif est de faire prendre conscience de l'existence de différents types d'exercices et de correspondances entre ces types et les méthodes mises en œuvre dans les machines. Cela devrait aider l'élève à reconnaître les différents types par analyse de l'énoncé et d'associer à chaque type une ou des machines susceptibles de résoudre les exercices de ce type.

6.2. Construction de l'ensemble des solutions

Le but est ensuite de faire comprendre à l'élève que la méthode qu'il a utilisée pour produire une solution particulière peut être généralisée de manière à produire l'ensemble de toutes les solutions d'un exercice. Les machines ont été conçues de telle sorte que cette généralisation soit possible et "naturelle".

Le système propose de nouveaux exercices qui demandent cette fois de construire l'ensemble des objets répondant à certaines spécifications (et non plus un seul). Les machines disponibles ont le même aspect que les précédentes, mais le résultat qu'elles engendrent n'est plus un exemple particulier : c'est une trace des choix et des actions qui ont été faits. Cette trace constitue un algorithme dont certaines instructions peuvent être indéterministes (tirer un élément au hasard dans un ensemble). Ainsi, en effectuant exactement les mêmes actions que dans la tâche de construction d'une seule solution, l'élève écrit en fait un algorithme. Ce mode de fonctionnement est analogue à celui de certains logiciels qui peuvent enregistrer les actions de l'utilisateur sous forme de macros.

L'objectif est de faire comprendre comment une succession particulière d'actions engendrant une solution peut servir de prototype et être généralisée en un programme engendrant toutes les solutions. Cela fournit à l'élève l'occasion de se familiariser avec la façon dont ces programmes sont formulés (c'est le système qui les formule) et de comparer le texte d'un programme avec le résultat de son exécution (le système peut exécuter le programme). L'énumération des solutions est parfois trop longue (le système ne construit l'énumération que jusqu'à un certain nombre d'éléments) mais elle est virtuellement contenue dans le texte du programme. L'ensemble est décrit par un algorithme plutôt que par une énumération d'éléments ou une conjonction de contraintes.

Nous espérons qu'avec un entraînement sur des exemples variés, l'élève renforcera sa capacité à reconnaître des types d'exercices et qu'il se rendra compte qu'à chaque type d'exercice peut être associé un type d'algorithme, en liaison avec la structure et le comportement de la machine associée.

6.3. Mathématisation des énoncés et des algorithmes

Le but de la dernière phase est de traduire les acquis obtenus jusqu'à maintenant en termes mathématiques : ensembles, listes, fonctions, injections, etc. La tâche de l'élève sera d'élaborer entièrement des constructions, sans le secours de machines toutes prêtes, puis d'utiliser ces constructions pour dénombrer. Les modalités de cette dernière phase ne pourront être fixées qu'après des expérimentations concernant les premières étapes.

7. Conclusion

Nous avons formalisé une méthode de dénombrement dite "constructive" qui se prête à la démonstration mathématique tout en restant proche des démarches habituelles des élèves. Elle consiste à énoncer un algorithme d'énumération des éléments de l'ensemble à dénombrer et à raisonner sur cet algorithme sans l'exécuter.

Nous avons réalisé un système qui résout des exercices de dénombrement en utilisant cette méthode et qui est capable d'étudier la validité d'une proposition de solution. De manière à rendre ce système accessible aux élèves sous forme d'EIAO, nous avons prévu une progression pédagogique qui commence par une familiarisation fondée sur des "machines à construire des objets".

Chaque machine est associée à une classe de problèmes et matérialise un certain type de construction. Les activités proposées à l'élève sont destinées à l'aider à se former des représentations adaptées à la résolution de problèmes de dénombrement par la méthode constructive et à discerner les classes de problèmes. Nous avons réalisé des prototypes de machines à construire, mais ils n'ont pas fait l'objet de tests auprès d'élèves.

La progression prévue va jusqu'à la formalisation mathématique des solutions et des démonstrations. Nous espérons ainsi amener les élèves à reconnaître la nécessité de modéliser les problèmes et à améliorer leurs capacités de modélisation. Le domaine des dénombrements est un bon support pour cela et malgré son caractère apparemment spécialisé, il ouvre la voie à de nombreux autres domaines : probabilités, structures de données informatiques, algorithmique, théorie des ensembles.

8. Bibliographie

[ANT 88] Antibi A., *Étude sur l'enseignement de méthodes de démonstration. Enseignement de la notion de limite : réflexions, propositions*. Thèse d'état, Toulouse, Juin 1988.

[BAT 95] Batanero C., Godino J.D., Navarro-Pelayo V., *The use of implicative and correspondence analysis for assessing pupils' combinatorial reasoning*. R.Gras(ed) : Actes du colloque Méthodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en Didactique des Mathématiques IRMAR Rennes et IRESTE Nantes 1995, p 245-256.

[BER 95] Bernat P., Morinet-Lambert J., *Spécificités et modélisation de l'interaction dans un EIAO*. Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur, Tome 2. Paris, Eyrolles, 1995,p 209-220

[DUB 84] Dubois J.-G., *Une systématique des configurations combinatoires simples*. Educational studies in Mathematics 15 (1984),p 37-57.

[DUB 95] Dubourg X., Delozanne E., Grugeon B., *Situation d'interaction en EIAO : le système REPERES*, Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur, Tome 2. Paris, Eyrolles, 1995,p 233-244.

[FIS 88] Fischbein E., Gazit A., *The combinatorial solving capacity in children and adolescents*. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 5, 1988,p 193-198.

[GRE 81] Green D.R., *Probability concepts in high school pupils aged 11-16 years*. Ph. D. Thesis. Loughborough University, 1981.

[GUI 95] Guin N., Giroire H., Tisseau G., *Le classement de problèmes : Une méthode de résolution pour le module expert d'un EIAO. Application au problème de dénombrement*. Guin D., Nicaud J.F., Py D., (eds) Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur, Tome 2. Paris, Eyrolles, 1995,p 113-124.

[JUL 95] Julo J., *Représentation des problèmes et réussite en Mathématiques*. Rennes, Presses Universitaires de Rennes, Collection Psychologie, 1995.

[KOW 74] Kowalski R., Predicate logic as a programming language. Proc. IFIP Congress 1974, Stockholm, North Holland, 1974.

[PIT 90] Pitrat J., *Métaconnaissance. Futur de l'intelligence artificielle*. Paris, Hermès, 1990.

[TIS 96] Tisseau G., Giroire H., Le Calvez F., Urtasun M., Duma J., *Une méthode "constructive" de résolution de problèmes de dénombrement et sa mise en oeuvre*. Rapport interne Laforia 96/11, mai 1996.

[TIS 97] Tisseau G., Giroire H., Le Calvez F., Urtasun M., Duma J., *Un résolveur d'exercices de dénombrement utilisant une méthode constructive*, Rapport interne Laforia 97 (à paraître).